Dr. Martin Jesenko
Dr. Andrea Korsch

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Mathematisches Institut

Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens

im Sommersemester 2018

Übungsblatt 11

Zum Schluss lernen wir noch berühmte Integralsätze kennen: die Sätze von Green, Stokes und Gauß. Sie verbinden Riemann-, Oberflächen- und Kurvenintegrale und ergeben anschauliche Bedeutungen der Divergenz und Rotation:

- Die Divergenz misst den aus der Volumeneinheit heraustretenden Fluss, d. h. $\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ ist die Quelldichte von $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{x}$.
- Die Rotation misst die Wirbelstärke von $\boldsymbol{F}$. Genauer, für beliebigen Einheitsvektor $\boldsymbol{n}$ ist $\langle \operatorname{rot} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{n} \rangle$ die Zirkulation des Vektorfeldes $\boldsymbol{F}$ im Punkt $\boldsymbol{x}$ pro Flächeneinheit für jedes reguläre Flächenstück senkrecht zu $\boldsymbol{n}$.

Hausaufgaben

Diese Hausaufgaben können auch abgegeben werden, die erreichten Punkte sind aber Bonuspunkte. Die Abgabefrist ist Freitag, der 20. Juli 2018, um 12 Uhr. Schreiben Sie groß und deutlich auf die erste Seite Ihre Namen und Ihre Gruppe und heften Sie alle Blätter zusammen. Die korrigierten Blätter können am Mittwoch den 25. Juli zwischen 08.00 und 12.00 Uhr bei Frau Korsch (Hermann-Herder Str.10, Raum 228) abgeholt werden.

1. Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ das abgeschlossene Dreieck mit Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(1,2)$. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{F}(x,y) := \begin{pmatrix} xy \\ x^2y^3 \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral von $\boldsymbol{F}$ längs dem Rand von D (im Gegenuhrzeigersinn)

(a) indem Sie den Rand entsprechend parametrisieren,

(b) mit Hilfe des Satzes von Green.

2. Wir betrachten die Fläche $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 25, \ z \geq 4\}$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche.

(b) Sei

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x,y,z) := \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie

$$\int_M \operatorname{rot} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S}$$

einmal mit der Definition des Flusses und einmal mit dem Satz von Stokes.

3. Es sei das Vektorfeld

$$\boldsymbol{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \boldsymbol{F}(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z^2(x+1) \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie den Fluss von $\boldsymbol{F}$ durch die Fläche

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = (z-1)^2,\ z \in [0, 1]\},$$

indem Sie

(a) ihn nach der Definition ausrechnen,

(b) den Satz von Gauß anwenden.